

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Rookie Level.....	2
Hotelrenovierung_1 (B_210)	2
Konten (B_387)	2
Oelbohrungen (B_221)	2
Leihwagen (B_318)	3
Wohnungen (2) * (B_424).....	3
Kaffeeautomat * (B_285)	4
Speiseeis* (B_455)	4
Interneteinkaeufe (B_216)	4
Pro Level	5
Viruserkrankung (B_198).....	5
All Star Level	6
Lösungen.....	7
Rookie Level.....	7
Pro Level.....	10
All Star Level.....	11

Rookie Level

Hotelrenovierung_1 (B_210)

- a) Ein Viertel aller Hotelzimmer wird als Raucherzimmer angeboten. Bei der Renovierung wurden zwei Drittel aller Raucherzimmer und 40 % aller Nichtraucherzimmer erneuert.
- Erstellen Sie ein Baumdiagramm mit allen gegebenen Daten.
 - Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zufällig ausgewähltes Zimmer renoviert wurde.
 - Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zufällig ausgewähltes renoviertes Zimmer ein Nichtraucherzimmer ist.

Konten (B_387)

Von den Kunden einer Bankfiliale besitzen 80 % ein Gehaltskonto und 40 % ein Sparkonto. 25 % der Kunden der Bankfiliale besitzen sowohl ein Gehalts- als auch ein Sparkonto. G bezeichnet das Ereignis, dass ein Kunde ein Gehaltskonto besitzt. S bezeichnet das Ereignis, dass ein Kunde ein Sparkonto besitzt.

- a) – Übertragen Sie die Werte der Angabe in die entsprechenden Felder der unten stehenden Vierfeldertafel.
- Ermitteln Sie die Werte in den restlichen Feldern und tragen Sie diese ein.

	besitzt Gehaltskonto	besitzt kein Gehaltskonto	Summe
besitzt Sparkonto			
besitzt kein Sparkonto			
Summe			

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 10 zufällig ausgewählten Kunden mindestens 2 Kunden weder ein Gehalts- noch ein Sparkonto besitzen.

- b) – Überprüfen Sie nachweislich, ob die Ereignisse G und S voneinander unabhängig sind.

Ölbohrungen (B_221)

Eine Ölgesellschaft führt Probebohrungen in Texas und in Alaska durch. Erfahrungsgemäß findet man bei einer Bohrung in Texas mit einer Wahrscheinlichkeit von 85 % und bei einer Bohrung in Alaska mit einer Wahrscheinlichkeit von 65 % Öl.

- d) Von allen Arbeiter/innen der Ölgesellschaft arbeiten 30 % in Alaska, die übrigen bei Bohrungen in Texas. Insgesamt sprechen 65 % aller Arbeiter/innen Spanisch. Ein Sechstel aller in Alaska tätigen Arbeiter/innen spricht Spanisch.
- Übertragen Sie die Werte der Angabe in die entsprechenden Felder der untenstehenden Vierfeldertafel.
 - Ermitteln Sie die Werte der restlichen Felder und tragen Sie diese in die entsprechenden Felder ein.

	Arbeiter/innen in Alaska	Arbeiter/innen in Texas	Summe
Spanisch sprechend			
nicht Spanisch sprechend			
Summe			

Leihwagen (B_318)

Ein Leihwagen-Unternehmen hat in seinem Fuhrpark 2 Modelle. Modell 1 ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,62 verliehen, Modell 2 mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,4. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Modelle gleichzeitig verliehen sind, beträgt 0,35.

A bezeichnet das Ereignis, dass Modell 1 verliehen ist, und B bezeichnet das Ereignis, dass Modell 2 verliehen ist.

- a) – Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 1 Modell nicht verliehen ist.
- b) – Übertragen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Angabe in die entsprechenden Felder der unten stehenden Vierfeldertafel.
– Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten in den restlichen Feldern und tragen Sie diese ein.

	A	nicht A	Summe
B			
nicht B			
Summe			

– Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau einer der beiden Leihwagen verliehen ist.

- c) – Zeigen Sie, dass die beiden Ereignisse A und B nicht unabhängig voneinander sind.
– Beschreiben Sie in Worten, welches Ereignis durch die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,35}{0,4} = 0,875$$

bestimmt wird.

Wohnungen (2) * (B_424)

- d) In einer Landeshauptstadt werden 90 % der Wohnungen als Wohnungen mit mittlerem Wohnwert eingestuft, 10 % der Wohnungen als Wohnungen mit gutem Wohnwert. 20 % der Wohnungen haben eine Größe von weniger als 60 m². 16 % aller Wohnungen haben eine Größe von weniger als 60 m² und einen mittleren Wohnwert.

– Vervollständigen Sie die nachstehende Vierfeldertafel so, dass sie den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt.

	Wohnungsgröße weniger als 60 m ²	Wohnungsgröße mindestens 60 m ²	Summe
mittlerer Wohnwert			
guter Wohnwert			
Summe			

- Weisen Sie nach, dass die Merkmale „Wohnungsgröße“ und „Wohnwert“ (stochastisch) abhängig voneinander sind.
– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Wohnung weniger als 60 m² Wohnfläche hat, wenn man weiß, dass sie einen mittleren Wohnwert hat.

Kaffeeautomat * (B_285)

c) An 80 von insgesamt 200 Schultagen hat Chiara Nachmittagsunterricht.

An Schultagen mit Nachmittagsunterricht trinkt sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % Kaffee, an Schultagen ohne Nachmittagsunterricht beträgt diese Wahrscheinlichkeit 20 %.

- 1) Erstellen Sie für diesen Sachverhalt ein mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten beschriftetes Baumdiagramm.
- 2) Beschreiben Sie ein mögliches Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit folgendermaßen berechnet wird:

$$P(E) = \frac{120}{200} \cdot 0,8 = 0,48$$
- 3) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Chiara heute Nachmittagsunterricht hat unter der Voraussetzung, dass sie heute Kaffee getrunken hat.

Speiseeis* (B_455)

d) Nach einer längeren Lagerung der Milch und der Eier besteht die Gefahr, dass diese Rohstoffe zu einem bestimmten Zeitpunkt t verdorben sind.

A bezeichnet das Ereignis, dass die Milch zum Zeitpunkt t verdorben ist. Das Ereignis A tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 % ein.

B bezeichnet das Ereignis, dass die Eier zum Zeitpunkt t verdorben sind. Das Ereignis B tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 2 % ein.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 % sind beide Rohstoffe zum Zeitpunkt t verdorben.

Die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Ereignisse können in einer Vierfeldertafel dargestellt werden.

- 1) Vervollständigen Sie die nachstehende Vierfeldertafel so, dass sie den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt.

	A	nicht A	Summe
B			
nicht B			
Summe			

- 2) Zeigen Sie, dass die beiden Ereignisse A und B voneinander abhängig sind.

Interneteinkäufe (B_216)

a) Ein Marktforschungsinstitut führte eine Umfrage unter 5 000 Personen über ihr Einkaufsverhalten durch. Unter den Befragten befanden sich 3 000 Frauen. Die Umfrage ergab, dass 3 450 aller Befragten, davon 1 050 Männer, Einkäufe im Internet erledigen.

– Interpretieren Sie den nachstehend berechneten Prozentsatz im gegebenen Sachzusammenhang.

$$\frac{3450 - 1050}{3000} = 80 \%$$

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte befragte Person, die im Internet Einkäufe erledigt, eine Frau ist.

Pro Level

Viruserkrankung (B_198)

- b) Ein neues Medikament soll bei der Bekämpfung des Virus helfen. Leider hat es auch Nebenwirkungen. 2 % der erkrankten Personen leiden an Kopfschmerzen, 1 % an Schwindelanfällen. 0,2 % weisen beide Symptome auf. In der folgenden Rechnung wurde die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der Nebenwirkungen auftritt, ermittelt:

$$P(\text{„mindestens 1 Nebenwirkung“}) = 0,02 + 0,01 = 0,03$$

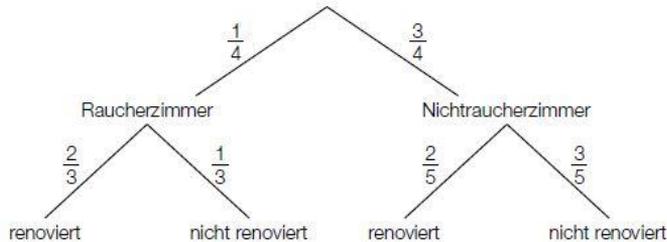
- Erklären Sie, welcher Fehler dabei gemacht wurde.
 - Stellen Sie die Berechnung richtig.
- c) Bei einer Gesundenuntersuchung wird ein Virustest durchgeführt. Damit können 99 % der Virusträger/innen erkannt werden, noch bevor die Krankheit ausbricht. 10 % der Untersuchten sind tatsächlich Virusträger/innen. Leider zeigt der Test auch bei 2 % der gesunden Personen eine Infektion an.
- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person gesund ist, unter der Voraussetzung, dass eine Virusinfektion diagnostiziert wurde.

Lösungen

Rookie Level

Hotelrenovierung (1) (B_210) Lösung

a)



$$P(\text{„renoviert“}) = P(\text{„Raucherzimmer und renoviert“}) + P(\text{„Nichtraucherzimmer und renoviert“}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{15}$$

$$P(\text{„Nichtraucherzimmer und renoviert“}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$$

$$P(\text{„Nichtraucherzimmer | renoviert“}) = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{7}{15}} = \frac{9}{14} \approx 64,29 \%$$

Konten * (B_387) Lösung

a)

	besitzt Gehaltskonto	besitzt kein Gehaltskonto	Summe
besitzt Sparkonto	25 %	15 %	40 %
besitzt kein Sparkonto	55 %	5 %	60 %
Summe	80 %	20 %	

Die hervorgehobenen Werte in der oben stehenden Tabelle sind diejenigen, die aus der Angabe übertragen wurden.

X ... Anzahl der Kundinnen und Kunden, die weder ein Gehalts- noch ein Sparkonto besitzen

Binomialverteilung: $n = 10$, $p = 0,05$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 0,08613... \approx 8,61 \%$$

b) Sind zwei Ereignisse unabhängig, so gilt: $P(G \cap S) = P(G) \cdot P(S)$.

$$P(G \cap S) = 0,25$$

$$P(G) \cdot P(S) = 0,8 \cdot 0,4 = 0,32 \neq 0,25$$

Da $P(G) \cdot P(S) \neq P(G \cap S)$, sind die beiden Ereignisse abhängig.

Ölbohrungen * (B_221) Lösung

d)

	Arbeiter/innen in Alaska	Arbeiter/innen in Texas	Summe
Spanisch sprechend	5 %	60 %	65 %
nicht Spanisch sprechend	25 %	10 %	35 %
Summe	30 %	70 %	

Leihwagen * (B_318) Lösung

a) $1 - P(A \cap B) = 1 - 0,35 = 0,65$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Modell nicht verliehen ist, beträgt 0,65.

b)

	A	nicht A	Summe
B	0,35	0,05	0,40
nicht B	0,27	0,33	0,60
Summe	0,62	0,38	

Die hervorgehobenen Werte in der oben stehenden Tabelle sind diejenigen, die aus der Angabe übertragen wurden.

Die Wahrscheinlichkeit, dass genau einer der beiden Leihwagen verliehen ist, beträgt $0,27 + 0,05 = 0,32$.

c) Sind zwei Ereignisse voneinander unabhängig, so gilt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$P(A) \cdot P(B) = 0,62 \cdot 0,4 = 0,248$

$P(A \cap B) = 0,35$

Die beiden Ereignisse sind also nicht voneinander unabhängig: $0,35 \neq 0,248$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass Modell 1 verliehen ist, wenn man weiß, dass Modell 2 verliehen ist, beträgt 0,875.

Wohnungen (2) * (B_424) Lösung

d)

	Wohnungsgröße weniger als 60 m ²	Wohnungsgröße mindestens 60 m ²	Summe
mittlerer Wohnwert	0,16	0,74	0,90
guter Wohnwert	0,04	0,06	0,10
Summe	0,20	0,80	

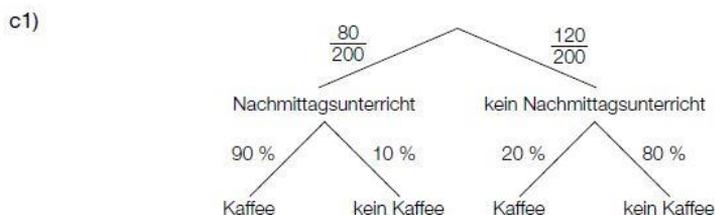
Für eine Unabhängigkeit der beiden Merkmale müsste z. B. gelten:

$P(\text{„mittlerer Wohnwert und Größe weniger als 60 m}^2\text{“}) =$
 $= P(\text{„mittlerer Wohnwert“}) \cdot P(\text{„Größe weniger als 60 m}^2\text{“})$

Es gilt jedoch: $0,16 \neq 0,9 \cdot 0,2$

$P(\text{„Größe weniger als 60 m}^2\text{“} | \text{„mittlerer Wohnwert“}) = \frac{0,16}{0,9} = 0,17777... \approx 0,1778$

Kaffeeautomat * (B_285) Lösung



c2) Chiara hat keinen Nachmittagsunterricht und trinkt keinen Kaffee.

c3) $P(\text{„Nachmittagsunterricht“} | \text{„Kaffee“}) = \frac{\frac{80}{200} \cdot 0,9}{\frac{80}{200} \cdot 0,9 + \frac{120}{200} \cdot 0,2} = 0,75$

Speiseeis* (B_455) Lösung

d1)

	A	nicht A	Summe
B	0,005	0,015	0,02
nicht B	0,005	0,975	0,98
Summe	0,01	0,99	

d2) $P(A) \cdot P(B) = 0,01 \cdot 0,02 = 0,0002$

$$P(A \cap B) = 0,005$$

Da $P(A) \cdot P(B) \neq P(A \cap B)$ ist, sind die Ereignisse A und B voneinander abhängig.

Interneteinkäufe (B_216) Lösung

a) 80 % ist der Prozentsatz derjenigen befragten Frauen, die im Internet Einkäufe erledigen.

$$P(\text{„Frau“} | \text{„Interneteinkäufe“}) = \frac{P(\text{„Frau und Interneteinkäufe“})}{P(\text{„Interneteinkäufe“})} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{2400}{3000}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{2400}{3000} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1050}{2000}}$$

$$= 0,6956\dots$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte befragte Person, die im Internet Einkäufe erledigt, eine Frau ist, beträgt rund 69,6 %.

Pro Level

Viruserkrankung (B_198) Lösung

- b) In der Formel wurde nicht berücksichtigt, dass es auch erkrankte Personen gibt, bei denen beide Nebenwirkungen gleichzeitig eintreten. Die richtige Formel lautet:

$$\begin{aligned} P(\text{„mindestens 1 Nebenwirkung“}) &= \\ P(\text{„Kopfschmerzen“}) + P(\text{„Schwindelanfälle“}) - P(\text{„beide Nebenwirkungen“}) &= \\ 0,02 + 0,01 - 0,002 &= 0,03 - 0,002 = 0,028 \end{aligned}$$

Auch andere Herleitungen der Formel sind möglich.

- c) $P(\text{„gesund | positiver Test“}) = \frac{P(\text{„gesund und positiver Test“})}{P(\text{„positiver Test“})} = \frac{0,9 \cdot 0,02}{0,9 \cdot 0,02 + 0,1 \cdot 0,99} = 0,1538$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 15,4 %.

